

文章编号: 1671-0576(2021)01-0013-07

互质极化阵列的 DOA 估计算法研究

姜 阳¹, 赵勇武², 李晴晴², 张军星², 蒋 驰², 董 文²

(1. 空军预警学院, 湖北 武汉 430019; 2. 上海无线电设备研究所, 上海 201109)

摘 要: 针对极化阵列计算复杂度高、互耦效应大的难点问题, 提出一种基于三正交偶极子互质阵列的极化稀疏算法, 用于波达方向(DOA)估计。首先充分利用三正交偶极子三个通道的所有信息, 形成一个拥有更多阵元的虚拟线阵, 使得原本不相干的信号变为相干信号; 然后进一步使用前向后向空间平滑的方法对虚拟阵列的协方差矩阵进行解相干。该算法可以扩展阵列孔径并降低计算复杂度。通过多组仿真验证极化稀疏算法的有效性, 证明该算法有较高的估计精度。

关键词: 阵列信号处理; 电磁矢量传感器; 互质阵列; 阵列扩展; 波达方向估计

中图分类号: TJ765.3

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1671-0576.2021.01.003

Direction of Arrival Estimation Algorithm Based on the Polarization Co-prime Array

JIANG Yang¹, ZHAO Yong-wu², LI Qing-qing²,
ZHANG Jun-xing², JIANG Chi², DONG Wen²

(1. Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, Hubei, China;
2. Shanghai Radio Equipment Research Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: To solve the problem of high computational complexity and large mutual coupling effect of polarized array, a polarized sparse algorithm based on three-cross dipole co-prime array is proposed for direction of arrival (DOA) estimation. A virtual linear array with more array elements is formed, by making full use of all information of the three channels of three-cross dipole, so that the uncorrelated signals become coherent signals. Then the forward and backward spatial smoothing method is used to decoherence the covariance matrix of virtual array. The algorithm can expand the array aperture and reduce the computational complexity. The effectiveness of the polarized sparse algorithm is verified by several groups of simulation experiments. The results show that the algorithm has better estimation accuracy.

Key words: array signal processing; electromagnetic vector sensor; co-prime array; array extension; DOA estimation

收稿日期: 2020-06-28

作者简介: 姜 阳(1985—), 男, 硕士研究生, 主要从事信息对抗作战指挥技术研究。

通信作者: 董 文(1990—), 男, 博士, 工程师, 主要从事雷达信号处理技术研究。

0 引言

被动雷达导引头接收目标辐射的电磁信号,并对目标的角度进行估计,估计精度直接影响制导系统性能。随着被动雷达导引头技术的发展,采用极化天线成为一种趋势。与圆极化天线相比,线极化天线可以对极化角度进行估计。极化信息可以提高被动雷达导引头的分辨力、抗干扰能力等性能。本文针对三正交偶极子天线,研究极化互质阵列的高精度、低复杂度测角算法。

极化敏感阵列由多个电磁矢量传感器组成,目前针对极化敏感阵列的算法大部分是基于均匀阵列的,且阵元间距为半波长。阵元间距过近导致互耦效应明显^[1],致使波达方向(direction of arrival, DOA)估计和极化角度估计算法性能急剧下降。并且均匀线阵对阵元间的互相关信息利用不充分,存在信息冗余。因此,减少互耦效应、提高信息利用率将会明显提高雷达测向性能。文献[2-5]提出了将电磁矢量传感器进行稀疏布阵的方法,将阵元间距设置为大于半波长,从而减少互耦效应。而包括最小冗余阵^[6]和嵌套阵^[7]在内的稀疏阵列布阵是无规律的,即当阵元数较多的时候,无法迅速找出排列方法。将三正交电磁矢量传感器布阵为互质阵列,可使稀疏布阵方式有规律可循。但由于每个阵元相当于由三个方向的线极化天线组成,使得计算复杂度增加,因此如何降低计算复杂度成为极化敏感阵列测向的一个难点。

为减少计算复杂度,文献[8]利用正交偶极子天线组成阵列,并结合四元数算法将协方差矩阵维度降低一半,但该算法无法直接应用于三正交偶极子天线。文献[9-11]提出了基于电磁矢量传感器的嵌套阵算法,通过增加阵元间距提高估计精度,并利用矢量叉乘的方法去模糊。为了得到更加通用的阵列形式,互质阵列被提出。与嵌套阵列原理相同,互质阵列是由两个阵元数与阵元间距都互质的均匀线阵,共用同一个原点排列而成,其中的任意两个互质的阵元间距都是半波长的整数倍。但由于新生成的虚拟阵列存在孔洞,导致阵元的利用率无法达到最大化。文献[12]提出了一种基于六维电磁矢量传感器的差合成方法,利用协方差矩阵形成虚拟阵列,并使用多重信

号分类(multiple signal classification, MUSIC)算法进行 DOA 估计。该算法计算量较大,并且在小快拍数情况下性能急剧下降。

针对如何减少互耦效应、在扩展阵列孔径的同时降低计算复杂度的问题,本文提出了一种基于三正交偶极子互质阵列的极化稀疏算法。该算法充分利用了极化阵列接收通道多的优势,在得到虚拟线阵的协方差矩阵后,将稀疏后的协方差矩阵进行去噪处理。

1 极化互质阵列数学模型

考虑一个稀疏的线阵,该线阵由两个均匀线阵组成,如图 1 所示。第一条均匀线阵的阵元数为 M ,阵元间距为 Nd , $d = \lambda/2$, λ 为入射信号波长;第二条均匀线阵的阵元数为 N ,阵元间距为 Md , M 和 N 两个数互质。此时两个均匀线阵除第一个起始点外,没有与起始点间距相同的阵元。当两个均匀线阵共同排列成一条线阵时,形成了一条由 $M + N - 1$ 个阵元组成的稀疏的互质线阵。

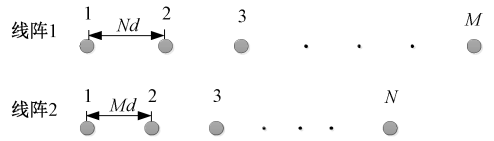


图 1 两个均匀线阵结构

假设 $M < N$, 可以从线阵 1 和线阵 2 的位置差中挑选出一条间距为半波长的均匀线阵。互质线阵的阵元位置差 $C_{m,n}$ 和位置差的集合 S 可以表示为

$$C_{m,n} = Mnd - Nmd, \\ 0 \leq n \leq N - 1, \quad 0 \leq m \leq M - 1 \quad (1)$$

$$S = \{C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{m,n}, -C_{1,1}, \\ -C_{1,2}, \dots, -C_{m,n}\} \quad (2)$$

将数量较少的子阵变为 $2M$ 个,且间距不变,实际的物理阵元变为 $2M + N - 1$ 个。这时的阵元间距差可以形成一个从 $-(2M - 1)Nd$ 到 $(2M - 1)Nd$ 的虚拟线阵,其中的连续点可组成从 $-(MN + M - 1)d$ 到 $(MN + M - 1)d$ 的虚拟均匀线阵,这样就可以估计出 $MN + M - 1$ 个信源,极大地提高了阵元的利用率。以 $M = 3, N = 2$ 为例,物理阵元与虚拟阵元如图 2 所示。

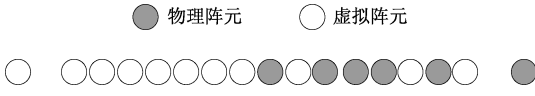


图 2 虚拟均匀线阵结构

对优化后的互质阵列进行分析,并假设每个阵元由三正交偶极子组成,如图 3 所示。图中: $p_m(m=1,2,\dots,2M+N-1)$ 是第 m 个阵元到原点的距离,与互质阵列的 M,N 具体取值有关; θ 为俯仰角; ϕ 为方位角。

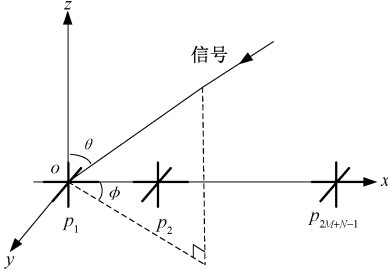


图 3 三正交偶极子稀疏线阵

假设有 K 个远场窄带信号入射到极化互质阵列上, K 个人射信号的俯仰角为 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K\}$ 。由于是线阵,设置方位角 $\varphi=90^\circ$,之后的方位角若不加说明则自动代入。当信号为完全极化电磁波时,阵列的第 $m(1 \leq m \leq 2M+N-1)$ 个阵元接收到的第 k 个人射信号可表示为

$$x_m(\theta_k) = s_k(t) \exp\left(j \frac{2\pi p_m}{\lambda} \sin(\theta_k)\right) \quad (3)$$

其中

$$s_k(t) = \rho_k \exp(j2\pi ft) \quad (4)$$

式中: $s_k(t)$ 为 t 时刻的第 k 个信号的复包络; ρ_k 为第 k 个信号的幅度; f 为信号频率。三正交偶极子天线可以接收电磁波极化信息,则第 k 个信号沿坐标轴三个方向的极化敏感向量 $[e_{x,k}, e_{y,k}, e_{z,k}]^T$ 可表示为

$$\mathbf{R}_{XX} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)]$$

$$= \begin{bmatrix} E[\mathbf{X}_x(t)\mathbf{X}_x^H(t)] & E[\mathbf{X}_x(t)\mathbf{X}_y^H(t)] & E[\mathbf{X}_x(t)\mathbf{X}_z^H(t)] \\ E[\mathbf{X}_y(t)\mathbf{X}_x^H(t)] & E[\mathbf{X}_y(t)\mathbf{X}_y^H(t)] & E[\mathbf{X}_y(t)\mathbf{X}_z^H(t)] \\ E[\mathbf{X}_z(t)\mathbf{X}_x^H(t)] & E[\mathbf{X}_z(t)\mathbf{X}_y^H(t)] & E[\mathbf{X}_z(t)\mathbf{X}_z^H(t)] \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $E[\cdot]$ 为数学期望函数。

对协方差矩阵 \mathbf{R}_{XX} 进行向量化,可以得到一个 $9(2M+N-1)^2 \times 1$ 维的向量

$$\mathbf{z} = \text{vec}(\mathbf{R}_{XX}) \quad (8)$$

式中: $\text{vec}(\cdot)$ 为矩阵向量化运算。这时从 $9(2M+N-$

$$\begin{bmatrix} e_{x,k} \\ e_{y,k} \\ e_{z,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta_k \\ 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma_k \\ \sin\gamma_k \exp(j\eta_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $\gamma_k \in [0, 90^\circ)$, 为极化辅助角; $\eta_k \in [-180^\circ, 180^\circ)$, 为极化相位差。将阵列接收模型写成矩阵形式^[8], 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_x(t) \\ \mathbf{X}_y(t) \\ \mathbf{X}_z(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}_x(\theta, \gamma, \eta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_x(t) \\ \mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}_y(\theta, \gamma, \eta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_y(t) \\ \mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}_z(\theta, \gamma, \eta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{A}(\theta)$ 为导向矢量; $\mathbf{X}_x(t), \mathbf{X}_y(t), \mathbf{X}_z(t)$ 分别为阵列接收向量 $\mathbf{X}(t)$ 在 x, y, z 方向上的分量; $\mathbf{E}_x(\theta, \gamma, \eta), \mathbf{E}_y(\theta, \gamma, \eta), \mathbf{E}_z(\theta, \gamma, \eta)$ 分别为极化敏感矩阵在 x, y, z 方向上的分量; $\mathbf{S}(t)$ 为信号矩阵; $\mathbf{N}_x(t), \mathbf{N}_y(t), \mathbf{N}_z(t)$ 分别为噪声矩阵 $\mathbf{N}(t)$ 在 x, y, z 方向上的分量。将阵列接收向量 $\mathbf{X}(t)$ 分解成 x, y, z 轴的三个方向的接收信号是为了方便矩阵重构。为方便起见,下文中 $\mathbf{E}_x(\theta, \gamma, \eta), \mathbf{E}_y(\theta, \gamma, \eta), \mathbf{E}_z(\theta, \gamma, \eta)$ 和 $\mathbf{A}(\theta)$ 分别写成 $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ 和 \mathbf{A} 。

2 矩阵重构

由式(6)可知,极化阵列输出的信号 $\mathbf{X}_x(t), \mathbf{X}_y(t), \mathbf{X}_z(t)$ 中均含有空域导向矢量 \mathbf{A} , 而根据来波方向和极化角度不同, $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ 将会取不同的值。当 γ_k 为极限值时,会导致某一个电偶极子输出的值很小,甚至为 0。例如,当 $\gamma_k = 0$ 时, $e_{x,k} = e_{z,k} = 0$, 这种值称为失效值。当不考虑噪声时,接收信号的协方差矩阵是 $3(2M+N-1) \times 3(2M+N-1)$ 维,其表达式为

$N-1)^2 \times 1$ 维的向量中挑选出 $2(2M+N-1)+1$ 个元素,形成一个从 $-(MN+M-1)d$ 到 $(MN+M-1)d$ 的虚拟均匀线阵。构建虚拟均匀线阵将要面临两个问题:

a) 如何避免因为空间角度和极化角度引起个别电偶极子的输出很小,甚至为 0,产生失效值的问题;

b) 由于噪声的存在,协方差矩阵是一个估计值,如何利用所有的输出数据减小误差的问题。

针对第一个问题,重构式(7)的协方差矩阵,得到一个新的 $(2M+N-1) \times (2M+N-1)$ 维协方差矩阵

$$\mathbf{R}'_{\text{xx}} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \rho_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_K^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^H + (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \mathbf{I} \quad (9)$$

式中: $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_K^2$ 分别为 K 个信号的功率; σ_x^2 、 σ_y^2 和 σ_z^2 分别为 x 、 y 和 z 方向的噪声功率; \mathbf{I} 为 $(2M+N-1) \times (2M+N-1)$ 维的单位矩阵。

由式(9)可知,此时已经避免了由于极化信息引起的极小值,甚至零值,从重构的协方差矩阵 \mathbf{R}'_{xx} 中挑选出的虚拟矩阵将不会存在失效值。

针对第二个问题,设互质阵列物理阵元位置 $n_i, n_j (1 \leq i \leq 2M, 1 \leq j \leq N)$ 的集合为 D , 此时阵元位置差集合 S 可表示为

$$S = \{n_i - n_j \mid n_i, n_j \in D\} \quad (10)$$

由式(10)可知,阵元位置差的集合 S 里的元素是对称的,当 $m \in S$ 时, $-m \in S$ 也成立。因此,下文只讨论正半轴的虚拟阵元。设集合 S 可组成的虚拟均匀线阵的集合为 Z , 则 Z 满足

$$Z = \{0, \pm 1, \dots, \pm 2(MN+M-1)\} \subseteq S \quad (11)$$

得到一个加权函数 $r(m)$, 即协方差矩阵中相同物理量的平均值,表达式为

$$r(m) = \text{card}(M(m)) \quad (12)$$

其中

$$M(m) = \{(n_i, n_j) \mid n_i - n_j = m; n_i, n_j \in D\} \quad (13)$$

式中: $\text{card}(\cdot)$ 为求集合中元素个数的函数; $M(m)$ 为满足 $n_i - n_j = m$ 的阵元位置 (n_i, n_j) 的集合。因此,虚拟的均匀线阵的第 m 个阵元的输出可以表示为

$$z'_m = \frac{1}{r(m)} \sum_{(n_i, n_j) \in M(m)} \langle \mathbf{R}'_{\text{xx}} \rangle_{n_i, n_j}, \\ -(2M+N-1) \leq m \leq (2M+N-1) \quad (14)$$

式中: $\langle \mathbf{R}'_{\text{xx}} \rangle_{n_i, n_j}$ 为 \mathbf{R}'_{xx} 第 n_i 行第 n_j 列的值。

将虚拟的均匀线阵写成向量形式,表达式为

$$\mathbf{z}' = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{b} + \tilde{\sigma}^2 \mathbf{i} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{z}' = [z'_{-(2M+N-1)}, \dots, z'_{(2M+N-1)}]^T \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1), \tilde{\mathbf{a}}(\theta_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}(\theta_K)] \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) = \left[\exp\left(-j \frac{2\pi(MN+M-1)d}{\lambda} \sin\theta_k\right), \dots, 1, \right. \\ \left. \dots, \exp\left(j \frac{2\pi(MN+M-1)d}{\lambda} \sin\theta_k\right) \right] \quad (18)$$

式中: $\tilde{\mathbf{A}}$ 为 $(2MN+2M-1) \times K$ 维的虚拟均匀线阵的导向矩阵; $\mathbf{b} = [\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_K^2]$ 为 K 个信号的功率矩阵; $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$, 为虚拟阵列的噪声功率; \mathbf{i} 是一个只有第 $MN+M$ 个元素为 1, 其它元素为 0 的列向量; T 表示均阵的转置; $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$ 为虚拟线阵的导向矢量。

3 基于矩阵重构的稀疏算法

3.1 前后向空间平滑解相干

通过对极化互质阵列的输出矩阵进行重构,得到了一个虚拟的标量均匀线阵,其自由度由 $2M+N-1$ 扩大到了 $2MN+2M-1$ 。通过式(13)对协方差矩阵进行筛选,组成虚拟均匀线阵的输出向量,使原本不相关的信号变为相关,即式(15)中 \mathbf{z}' 的自相关矩阵是秩为 1 的秩亏矩阵。利用空间平滑算法,在牺牲一部分自由度的基础上,恢复 \mathbf{z}' 的自相关矩阵的秩。前后向空间平滑原理如图 4 所示。

图 4 中,虚拟的均匀线阵被转化成了 P 个子阵,每个子阵包含 u 个阵元。其中, \mathbf{z}_p^f 为前向平滑的第 p 个子阵的接收数据,可表示为

$$\mathbf{z}_p^f = [z'_{-(MN+M+p)}, z'_{-(MN+M+p+1)}, \dots, z'_{-(MN+M+p+u-1)}]^T \\ = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{D}^{(p-1)} \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_p(t), \quad 1 \leq p \leq P \quad (19)$$

式中: $\mathbf{D}^{(p-1)}$ 为对角矩阵

$$\mathbf{D} = \text{diag}\left(\exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta_1\right), \dots, \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta_K\right)\right)$$

的前 $P-1$ 维构成的对角矩阵。于是 \mathbf{z}_p^f 的协方差的数学表达式为

$$\mathbf{R}_p^f = E[\mathbf{z}_p^f (\mathbf{z}_p^f)^H] \\ = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{D}^{(P-1)} \mathbf{R}_S (\mathbf{D}^{(P-1)})^H \tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\sigma}^2 \mathbf{I} \quad (20)$$

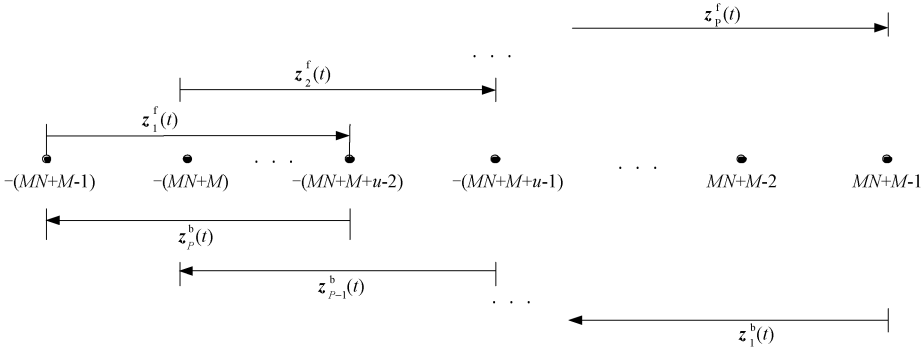


图 4 前后向空间平滑的子阵划分

式中: $\mathbf{R}_s = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)$, \mathbf{H} 表示矩阵共轭转置。

为了将协方差矩阵恢复成满秩,需要对各个子阵的协方差矩阵进行加和平均,即

$$\mathbf{R}^f = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \mathbf{R}_p^f = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s^f \tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\sigma}^2 \mathbf{I} \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{R}_s^f = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \mathbf{D}^{(p-1)} \mathbf{R}_s (\mathbf{D}^{(p-1)})^H \quad (22)$$

而后向空间平滑与之类似,不同的是子阵从最后一个往前划分,并取共轭。其表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_p^b &= [\mathbf{z}'_{MN+M-p}, \mathbf{z}'_{MN+M-p-1}, \dots, \mathbf{z}'_{MN+M-p-u+1}]^H \\ &= \mathbf{A} \mathbf{D}^{(p-1)} (\mathbf{D}^{(p-1)} \mathbf{S}(t))^* + \mathbf{N}_p^*(t), \\ & \quad 1 \leq p \leq P \end{aligned} \quad (23)$$

式中: $*$ 表示矩阵取共轭。

则第 p 个子阵的协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p^b &= E[\mathbf{z}_p^b (\mathbf{z}_p^b)^H] \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{D}^{(p-1)} \tilde{\mathbf{R}}_s (\mathbf{D}^{(p-1)})^H \tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\sigma}^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_s &= \mathbf{D}^{-(2MN+2M-2)} [\mathbf{S}^*(t)\mathbf{S}^T(t)] (\mathbf{D}^{-(2MN+2M-2)})^H \\ &= \mathbf{D}^{-(2MN+2M-2)} \mathbf{R}_s^* (\mathbf{D}^{-(2MN+2M-2)})^H \end{aligned} \quad (25)$$

同理,对后向平滑协方差矩阵进行加和平均,可得

$$\mathbf{R}^b = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \mathbf{R}_p^b = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s^b \tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\sigma}^2 \mathbf{I} \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{R}_s^b = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \mathbf{D}^{(p-1)} \tilde{\mathbf{R}}_s (\mathbf{D}^{(p-1)})^H \quad (27)$$

前后向空间平滑的协方差矩阵的表达式为

$$\mathbf{R}^{\text{fb}} = (\mathbf{R}^f + \mathbf{R}^b)/2 \quad (28)$$

单向空间平滑如果想要解相干,至少需要 $K/2$ 个子阵,才能把协方差矩阵恢复成满秩。而

前后向空间平滑虽然也会损失阵列孔径,但比单向空间平滑的损失小。也就是说,当有 K 个相关信号入射到阵列时,若每个子阵的阵元数为 $K+1$ 个,使用单向平滑的方法共需要 $2K$ 个阵元,而双向平滑只需要 $3K/2$ 个。而当阵元数 N 一定时,双向平滑的方法最多可以分辨出 $2N/3$ 个相关信号,而单向平滑的方法只能分辨出 $N/2$ 个相关信号。

3.2 极化稀疏 DOA 估计算法

由于信源的来波方向只占整个空域的一小部分,所以把来波方向在空域中进行展开所得到的信号向量一定是稀疏的。则式(15)的接收数据 \mathbf{z}' 的协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z &= E[\mathbf{z} (\mathbf{z}')^H] \\ &= \sum_{k=1}^{\bar{K}} \bar{\rho}_k^2 \mathbf{a}(\bar{\theta}_k) \mathbf{a}^H(\bar{\theta}_k) + \bar{\sigma}^2 \tilde{\mathbf{I}} \\ &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \bar{\mathbf{A}}^H + \bar{\sigma}^2 \tilde{\mathbf{I}}, \quad 1 \leq k \leq \bar{K} \end{aligned} \quad (29)$$

式中: $\bar{\rho}_k^2$ 为来自 $\bar{\theta}_k$ 方向的信号能量; $\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_k, \dots, \bar{\theta}_{\bar{K}}]$ 是在空域中俯仰角度所选择的 \bar{K} 个网格点矩阵; $\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}(\bar{\theta}_1), \dots, \mathbf{a}(\bar{\theta}_{\bar{K}})]$ 为由 \bar{K} 个网格点所组成的导向矢量过完备基; $\bar{\sigma}^2$ 为高斯噪声能量; $\tilde{\mathbf{I}}$ 为 $2MN+2M-1$ 维的单位阵; $\bar{\mathbf{R}}_s = \text{diag}(\bar{\rho}_1^2, \dots, \bar{\rho}_k^2, \dots, \bar{\rho}_{\bar{K}}^2)$ 是由 \bar{K} 个方向的信号功率组成的对角矩阵。 $\bar{\rho}_k^2$ 满足

$$\bar{\rho}_k^2 = \begin{cases} \rho_k^2, & \bar{\theta}_k \in \{\theta_1, \dots, \theta_K\} \\ 0, & \bar{\theta}_k \notin \{\theta_1, \dots, \theta_K\} \end{cases} \quad (30)$$

此时经典的协方差稀疏重构算法可以表示为

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\mathbf{p}}, \bar{\sigma}^2} \|\bar{\mathbf{p}}\|_0, \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{R}_z - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \bar{\mathbf{A}}^H - \bar{\sigma}^2 \tilde{\mathbf{I}}\|_F^2 \leq \zeta, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{p}} \geq 0, \bar{\sigma}^2 \geq 0 \quad (31)$$

式中: $\bar{\mathbf{p}} = [\bar{\rho}_1^2, \bar{\rho}_2^2, \dots, \bar{\rho}_K^2]^T$ 为 K 维的向量; $\|\cdot\|_0$ 为向量的 0 范数; $\|\cdot\|_F$ 为矩阵的 Frobenius 范数; ζ 为稀疏协方差矩阵 $\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \bar{\mathbf{A}}^H$ 和数据协方差矩阵 \mathbf{R}_z 的拟合误差。当用式(31)进行 DOA 估计时,将会遇到两个问题:一是当信源数大于阵元数时,特征值分解后无法得到噪声功率;二是虚拟线阵的方差矩阵 \mathbf{R}_z 的秩为 1 时,将不能正确进行 DOA 估计。在标量阵列中,由于每个阵元只能接收一组数据,所以当信源数大于阵元数时,不能对协方差矩阵 \mathbf{R}_{XX} 进行特征值分解,即不能利用其小特征值估计出噪声功率。但在本文使用的三正交偶极子的极化阵列中,每个阵元可以接收三组数据,这样虽然阵元数比信源数少,但是协方差矩阵的维数将会大于信源数。

若信源数 K 满足

$$2M + N - 1 < K < 3(2M + N - 1) \quad (32)$$

可以对 \mathbf{R}_{XX} 进行特征值分解,表达式为

$$\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{U}_{XS} \mathbf{\Lambda}_{XS} \mathbf{U}_{XS}^H + \mathbf{U}_{XN} \mathbf{\Lambda}_{XN} \mathbf{U}_{XN}^H \quad (33)$$

式中: \mathbf{U}_{XS} 和 \mathbf{U}_{XN} 分别为入射信号和噪声对应的特征向量所组成的矩阵; $\mathbf{\Lambda}_{XS}$ 是由 K 个较大特征值所组成的对角矩阵; $\mathbf{\Lambda}_{XN}$ 是由 $3(2M + N - 1) - K$ 个小特征值组成的对角矩阵。则当信源数已知时,噪声功率

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 \\ &= \frac{1}{3(2M + N - 1) - K} \sum_{i=1}^{3(2M+N-1)-K} \Lambda_{XN}(i, i) \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $\Lambda_{XN}(i, i)$ 为 $\mathbf{\Lambda}_{XN}$ 中位置为 (i, i) 的元素。

因此,当信源未知时,可以使用特征值中最小的值进行噪声功率估计,矩阵重构后的噪声功率 $\bar{\sigma}^2 = 3\hat{\sigma}^2$ 。对式(15)的接收数据 \mathbf{z}' 进行去噪处理,表达式为

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}' - 3\hat{\sigma}^2 \mathbf{i} \quad (35)$$

将式(35)代入式(21)和式(26),得到去噪后

的前后向空间平滑后的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}^{fb}$, 然后用 $\hat{\mathbf{R}}^{fb}$ 代替 \mathbf{R}_z , 此时 $\hat{\mathbf{R}}^{fb}$ 的秩为 $MN + M$ 。由于式(31)中,0 范数的求解是一个非线性多项式求解问题,所以引入 1 范数,把原始的非凸函数变为凸函数,可以表示为

$$\|\hat{\mathbf{R}}^{fb} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{R}}_s \bar{\mathbf{A}}^H\|_F^2 + \xi \|\mathbf{p}\|_1, \quad \text{s.t. } \bar{\mathbf{p}} \geq 0 \quad (36)$$

式中: ξ 为正则化参数。

此时式(36)的求解是一个凸优化问题,对求得的 $\bar{\mathbf{p}}$ 进行谱峰搜索,则谱峰所对应的 $\hat{\theta}_k$ ($k=1, 2, \dots, K$) 值即为所提方法的俯仰角度估计值。其中的正则化参数 ξ 是用来平衡稀疏的空间谱和重构的协方差矩阵的拟合误差的。 ξ 太大或者太小都会影响估计性能,过大则重构的协方差矩阵约束稀疏,导致真实的 DOA 所在的波峰缺失,过小则会使约束无效,出现伪峰。根据经验,取 $\xi=4$ 较为合适。

4 仿真结果

假设极化互质阵列中两个子阵的阵元数分别为 $M=3$ 和 $N=5$ 。此时的极化互质阵列的物理阵元数为 $2M+N-1=10$, 通道数为 10。输入信号为 12 个不相关的窄带信号。仿真搜索步长为 1° , 搜索范围为 $-80^\circ \sim +80^\circ$, 拟合误差 $\xi=4$, 通过 3 组仿真实验,对算法性能进行评估。为消除随机误差影响,每项实验均进行 500 次蒙特卡罗实验,用均方根误差来评价算法的估计精度。

(1) 单快拍仿真实验

单快拍情况下,对本文提出的极化稀疏算法与形成虚拟线阵后直接使用 MUSIC 的算法(以下称为 I-Co-MUSIC 算法)的性能进行仿真对比。设信噪比为 0 dB,快拍数为 1,则当 12 个信号入射到极化互质阵列时,两种算法经过单次实验所形成的空间谱如图 5 所示。可以看出,基于子空间算法的 I-Co-MUSIC 算法在单快拍情况下已经失效,而本文提出的极化稀疏算法在单快拍情形下仍然可以估计出 12 个信号,证明了极化稀疏算法在单快拍情况下,性能要优于 I-Co-MUSIC 算法。

(2) 不同快拍下仿真实验

对算法的 DOA 估计精度随快拍数的变化情况进行仿真。设信噪比为 -5 dB,快拍数由 50 变化到 500,步长为 50。此时极化稀疏算法和 I-Co-MUSIC 算法的俯仰角估计精度随快拍数的变化曲线如图 6 所示。可知,在快拍数小于 200

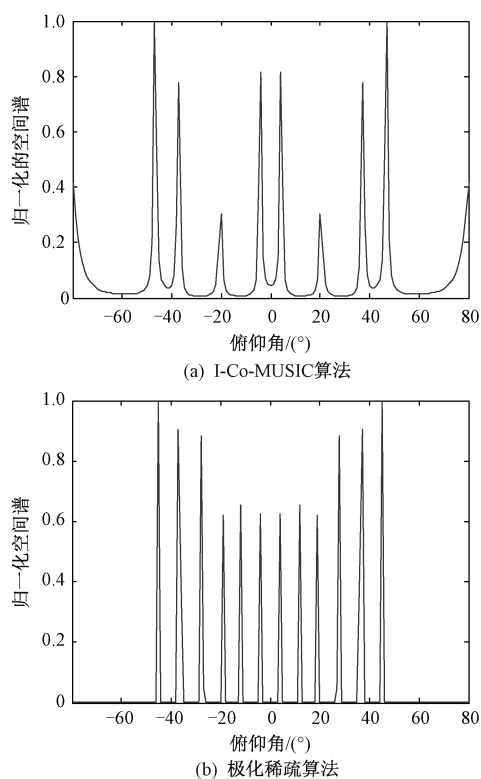


图 5 两种算法空间谱对比

时,极化稀疏算法精度更高,当快拍数大于 350 时,I-Co-MUSIC 算法精度更高。

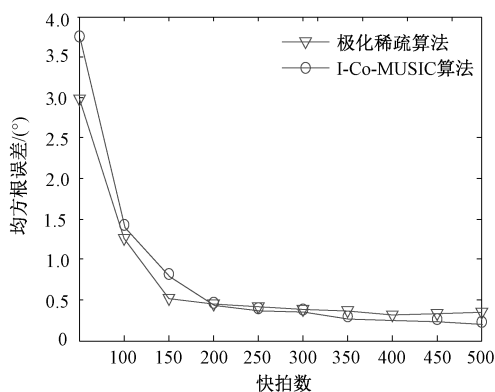


图 6 不同快拍数下估计俯仰角的均方值误差

(3) 不同信噪比下仿真实验

对算法的 DOA 估计精度随信噪比的变化情况进行仿真。设快拍数为 100,信噪比为 $(-10\sim 0)$ dB,步长为 1 dB,其他仿真条件不变。极化稀疏算法和 I-Co-MUSIC 算法的估计均方根误差随信噪比的变化曲线如图 7 所示。可知,信噪比小于 -4 dB 时,极化稀疏算法俯仰角估计精度略高于 I-Co-MUSIC 算法,但是当信噪比逐渐

增大,I-Co-MUSIC 算法估计精度会超过极化稀疏算法。结合实验 2,可知极化稀疏算法和 I-Co-MUSIC 算法,都可以完成信源数多于阵元数的 DOA 估计。

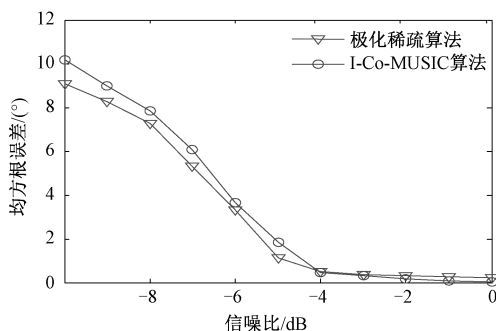


图 7 不同信噪比下俯仰角估计的均方根误差

5 结论

本文研究了由三正交偶极子构成的极化互质线阵的 DOA 估计问题,提出了一种接收数据矩阵重构的方法。该方法充分利用所有的接收数据,形成一个虚拟的均匀线阵,其阵元数大于实际物理阵元数,可以达到扩大阵列空间、提高阵元利用率的目的。形成虚拟线阵后原本不相干的信号变为相干信号,使用前后向空间平滑进行解相干,可以降低孔径损失。该算法利用了空域中信号的稀疏性及三正交偶极子的自身特性对方差矩阵进行去噪处理,并使用稀疏算法进行 DOA 估计。仿真结果证明,该算法有较好的估计精度。

参考文献

- [1] 刘勇,徐振海,肖顺平. 阵列互耦对极化敏感阵列滤波性能的影响[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2303-2306.
- [2] GUO M R, ZHANG Y D, CHEN T. DOA estimation using compressed sparse array [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(15): 4133-4146.
- [3] 丁进,杨明磊,李曙光. 一种多尺度稀疏极化敏感阵列及其 DOA 估计方法[J]. 上海航天, 2019, 36(5): 99-106, 114.
- [4] 司伟建,周炳赛,曲志显. 稀疏极化敏感阵列的波达方向和极化参数联合估计[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(5): 1129-1134.