

文章编号: 1671-0576(2021)03-0001-04

# 一种基于 Whitham 方程的导弹冲击波仿真优化方法

刘轶炜, 陈蕙心, 蔡 猛, 吴思源, 陆子劼

(上海无线电设备研究所, 上海 201109)

**摘 要:** 针对采用 Whitham 方程进行导弹冲击波仿真时, 由于形状系数为经验常数导致仿真结果不准确的问题, 提出了一种导弹冲击波仿真的优化方法。在冲击波振幅及周期仿真计算时, 将使用导弹横截面函数计算所得的形状系数替代以往的经验常数, 并引入了计算流体力学进行建模仿真优化。结果表明: 该仿真优化方法可以提高导弹冲击波仿真结果的准确性, 并具有普适性。

**关键词:** 导弹冲击波; Whitham 方程; 计算流体力学

**中图分类号:** V211.3

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1671-0576.2021.03.001

## Missile Shock Wave Simulation Optimization Based on Whitham Equation

LIU Yi-wei, CHEN Hui-xin, CAI Meng, WU Si-yuan, LU Zi-jie

(Shanghai Radio Equipment Research Institute, Shanghai 201109, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the shape coefficient is an empirical constant, which leads to the inaccurate simulation results obtained by using Whitham equation for missile shock wave simulation, an improved simulation method based on Whitham equation is proposed. Different shape coefficients are used in shock wave amplitude and period simulation, and computational fluid dynamics (CFD) analysis is used to model and optimize. The results show that the proposed method can improve the accuracy of missile shock wave simulation, and has universal applicability.

**Key words:** missile shock wave; Whitham equation; computational fluid dynamics

## 0 引言

物体超音速飞行, 前方空气被急剧压缩产生

音障, 当物体突破该音障时, 由于前方空气无法传播而累积成为激波面。这种激波在波面前方形成一个突然的超压边界, 在后方形成一个欠压面, 压力随时间变化的形状如字母 N, 称之为 N 形波。目前通常采用 Whitham 方程<sup>[1]</sup>对略超音速细长尖头弹体进行冲击波仿真, 对仿真结果中超压振

收稿日期: 2021-05-14

作者简介: 刘轶炜(1997—), 男, 硕士, 助理工程师, 主要从事激光半主动导引头技术研究。

幅及周期等参数进行分析,进而研究飞行过程中冲击波<sup>[2]</sup>对弹体的影响。弹体冲击波仿真通常选用经验常数作为 Whitham 方程的形状系数。由于不同类型导弹的形状系数具有较大差异,采用上述方法得到的仿真结果与实际情况存在较大偏差,不具有普遍适用性。本文提出了一种基于 Whitham 方程的导弹冲击波仿真优化方法,根据弹体头部横截面形状和弹体长宽比计算形状系数,提升超音速导弹弹体冲击波仿真的准确性。

## 1 Whitham 方程与导弹形状系数

以弹体头部顶点为坐标原点,沿弹轴方向自头向尾为  $x$  轴正方向,建立  $oxyz$  直角坐标系,弹体几何模型如图 1 所示。其中,  $S(x)$  为弹体的横截面积函数,  $R$  为弹体最宽处半径,  $H$  为弹体前端弧度部分长度,  $L$  为弹体整体长度。

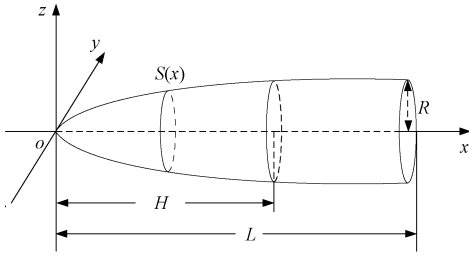


图 1 弹体几何模型图

利用 Whitham 方程可计算出距弹体一定距离的某点的冲击波振幅及周期,同时弹体的形状和尺寸等参数也被引入到 Whitham 方程中。基于 Whitham 方程改写的弹体横截面的函数表达式为

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^s \frac{S''(x)}{\sqrt{s-x}} dx \quad (1)$$

式中:  $s$  为横截面位置;  $S''(x)$  表示对弹体横截面积  $S(x)$  二次求导,即弹体横截面的函数表达式。对式(1)中的变量  $s$  进行积分,可得到 Whitham 积分惯性矩<sup>[3]</sup>

$$I_w = \int_0^L F(s) ds \quad (2)$$

定义弹体形状系数  $F_w$ ,  $F_w$  与 Whitham 积分惯性矩的关系可表示为

$$F_w = I_w^{1/2} \quad (3)$$

利用形状系数  $F_w$  可以计算某观测点处冲击

波的振幅<sup>[4-5]</sup>

$$\Delta P = 2^{1/4} P_0 \gamma (\gamma + 1)^{-1/2} [(Ma)^2 - 1]^{1/8} F_w r^{-3/4} \quad (4)$$

式中:  $P_0$  为环境气压;  $\gamma$  为比热容;  $Ma$  为观测点处马赫数;  $r$  为观测点与弹体的垂直距离。

以小型导弹为研究对象,若形状系数

$$F_w = \frac{R}{L^{1/4}} = \frac{D}{2L^{1/4}} \quad (5)$$

式中:  $D$  为导弹直径。根据式(4)可得到常用的冲击波振幅计算公式<sup>[6-7]</sup>

$$\Delta P = 0.53 [(Ma)^2 - 1]^{1/8} \frac{D}{L^{1/4}} r^{-3/4} \quad (6)$$

同时,依据 Whitham 方程, N 形波的周期可以表示为

$$\Delta T = 2^{5/4} \frac{(\gamma + 1)^{1/2}}{c_0} (Ma) \times [(Ma)^2 - 1]^{-3/8} F_w r^{1/4} \quad (7)$$

式中:  $c_0$  为观测点处的音速。

由式(5)和式(7)可知,冲击波周期与弹长成负相关。由于天线罩参与后激波的形成,故上述负相关关系不符合气动原理,因此给出了另一种关系式<sup>[8]</sup>

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P_0 c_0}{2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \sqrt{1 - \frac{1}{(Ma)^2}} r^{-1} \quad (8)$$

式(8)未引入形状系数  $F_w$ , 计算过程较简单,但该公式无法反映导弹形状对冲击波的影响。

为了仿真计算弹体形状(圆锥加圆柱)对 N 形波参数的影响,需引入相关环境下的大气数据。使用计算流体力学(CFD)仿真软件中的 elsA 分析工具,可以计算得到弹体附近气动尾迹的速度场和压力场。通过分析对比弹体在不同的形状、海拔以及飞行马赫数情况下的 N 形波数据,可得到比例系数  $k_s$ 。而冲击波的振幅  $\Delta P$  和周期  $\Delta T$  与  $k_s^{3/4}$  相关。

通过分析可知,当导弹弹径一定时,若弹体的圆柱体部分长度发生改变,冲击波振幅基本保持不变,不同弹体长度下振幅的相对误差仅为  $\pm 2\%$ ,而周期受弹体长度影响改变较大。

对于图 1 所示的弹体几何模型,弹体的形状可以用函数  $f(x)$  来表示,且基于 Whitham 方程的  $F(s)$  为关于弹体横截面的函数,而  $k_s$  为关于弹整体的函数,故计算  $k_s$  时需对  $F(s)$  沿弹轴,即

$x$  轴进行积分求解。根据式(1),可以得到  $k_s$  的表达式

$$k_s = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^L \int_0^s \frac{S''(x)}{\sqrt{s-x}} dx ds \right)^{1/2} \quad (9)$$

图1中  $S(x) = \pi (f(x))^2$ , 则  $S''(x) = f(x)$ 。取弹长  $L=1$  m, 根据不同的弹体横截面函数  $y=f(x)$ , 可计算得到不同的比例系数  $k_s$ , 如表1所示。

表1 不同弹体横截面函数对应的比例系数

函数类型	弹体横截面函数 $f(x)$	比例系数 $k_s$
椭圆	$\sqrt{4-3(x-1)^2}-1$	0.849 8
正弦	$\sin(\pi x/2)$	0.890 5
抛物线	$2x-x^2$	0.872 9
多项式	$\sqrt{3x^2-2x^3}$	0.894 4
锥形	$x$	1.154 7

由表1分析可知,不同弹体横截面函数对应的比例系数  $k_s$  取值为  $1.00 \pm 0.15$ 。

## 2 弹体形状对冲击波的影响

为了验证弹体形状对N形波参数的影响,设导弹飞行高度为海拔8.8 km,飞行马赫数为1.7,使用CFD软件<sup>[9]</sup>对不同尺寸及半径长度比的弹体进行冲击波仿真。用elsA工具计算弹体附近气动尾迹的速度场及压力场。在标准大气中,平行于弹体的压力分布会传播到海平面,此条件下选用非线性传播TRAPS代码<sup>[10]</sup>计算N形波。仿真结果如表2所示。

表2 不同尺寸弹体气动尾迹的速度场及压力场CFD仿真结果

弹体长度/m	弹体半径/m	超压/Pa	欠压/Pa	周期/ms
0.6	1.0	45.2	-41.4	41.6
1.0	1.0	45.1	-44.0	45.3
1.4	1.0	46.0	-40.9	51.4
1.2	2.0	76.4	-66.1	68.2
2.0	2.0	75.7	-69.0	80.0
2.8	2.0	77.5	-67.7	91.7

经上述推导可知,综合使用elsA工具和TRAPS代码计算所得的N形波是不对称的。

设弹体的半径长度比  $\delta=R/L$ , 则式(5)的形状系数可以表示为

$$F_w = \delta L^{0.75} \quad (10)$$

当  $\delta$  一定时,  $\Delta P, \Delta T$  与  $L^{0.75}$  成正比。对照表2可以发现:对于同一  $\delta$ , 超压部分增长为  $L^{0.72}$ , 周期部分增长为  $L^{0.80}$ ; 若给定弹体半径  $R$ , 其冲击波振幅相对误差仅为  $\pm 2\%$ 。

## 3 非均匀大气下冲击波

根据式(3)和式(8)对弹体进行冲击波影响的仿真分析时,假设前提是大气为均匀的。而大型导弹冲击波发生在一定的海拔  $z$  处,通常采样点在海平面处,故如采用上述理论对大型导弹的冲击波影响进行分析,存在一定的困难。

对于距弹体同样距离  $r$  的两个点  $M_0$  和  $M_z$ , 其中  $M_z$  位于与导弹相同海拔的位置  $z$  处,  $M_0$  位于其他海拔位置,设这两个点的大气压力分别为  $P_0$  和  $P_z$ , 音速分别为  $c_0$  和  $c_z$ 。已知导弹飞行马赫数,由式(4)和式(7)可以得到  $M_z$  处的冲击波振幅和周期为  $\Delta P_z$  和  $\Delta T_z$ 。设  $M_0$  处冲击波的振幅和周期为  $\Delta P_0$  和  $\Delta T_0$ , 若  $M_0$  和  $M_z$  两处的N形波声能相等,则有

$$\Delta P_0 = \Delta P_z \sqrt{P_0/P_z} \quad (11)$$

$$\Delta T_0 = \Delta T_z \sqrt{c_z/c_0} \quad (12)$$

上述公式已在标准大气环境下通过TRAPS传播代码进行测试验证。

结合某地空导弹<sup>[11]</sup>实际情况,对在地面提取的导弹飞行试验冲击波数据进行仿真。设导弹飞行海拔8 km,飞行马赫数1.7,推导可得其水平飞行时  $M_0$  处的冲击波振幅  $\Delta P_0$  以及周期  $\Delta T_0$ , 表达式为

$$\Delta P_0 = 2\sqrt{P_0 P_z} 2^{1/4} \gamma(\gamma+1) - 1/2 \times [(\text{Ma})^2 - 1]^{1/8} C_L F_{w\Delta P} r^{-3/4} \quad (13)$$

$$\Delta T_0 = 2^{5/4} \gamma(\gamma+1)^{1/2} / c_0 \times [(\text{Ma})^2 - 1]^{-3/8} C_L F_{w\Delta T} r^{1/4} \quad (14)$$

式中:  $C_L$  为升力系数;  $F_{w\Delta P}$  和  $F_{w\Delta T}$  分别为N形波振幅和周期对应的的弹体形状系数。

$F_{w\Delta P}$  和  $F_{w\Delta T}$  可表示为

$$F_{w\Delta P} = \frac{R}{H^{1/4}} \quad (15)$$

$$F_{w\Delta T} = 2^{-1} (L/H)^{1/4} R^{3/4} \quad (16)$$

考虑到导弹飞行过程中的自体旋转,计算时

将升力系数设为 1。使用三种仿真方法对地空导弹冲击波数据进行仿真,结果如表 3 所示。

表 3 不同仿真方法下地空导弹的冲击波数据

仿真方法	振幅 $\Delta P/\text{Pa}$	振幅相对误差/%	周期 $\Delta T/\text{ms}$	周期相对误差/%
CFD	44.6	0	45.3	0
Whitham 方程	32.5	-27.1	26.9	-40.6
优化后	48.5	8.7	44.5	1.8

由表 3 可知,充分考虑弹体形状和大气的不均匀性,采用相应的形状系数计算冲击波振幅和周期,可以明显提高冲击波仿真的准确性,得到的冲击波仿真结果相比 Whitham 方程更贴近 CFD 软件仿真结果。根据研究的导弹目标采用相应的形状系数,可以明显提高冲击波仿真的准确性;相应的仿真变化式也能够更准确地反映不同大气情况下的导弹冲击波,提高了仿真的普遍适用性。

## 4 结 论

本文针对采用 Whitham 方程进行导弹冲击波仿真时,由于经验形状系数影响致使仿真结果与实际情况不符的问题,提出了一种基于 Whitham 方程的导弹冲击波仿真优化方法。该方法考虑不均匀大气环境,结合弹径和弹体长度比计算形状参数,并利用其进行冲击波参数仿真计算。与 CFD 软件的仿真结果对照表明,该优化方法大幅度减小了使用 Whitham 方程仿真导弹冲击波时由于弹体形状导致的误差,在没有精确的 CFD 模型的前提下,能够针对不同类型的导弹给出更加准确的冲击波振幅以及周期仿真结果。

## 参 考 文 献

[1] 张慧. 分数阶 Fornberg-Whitham 型方程的解析解及其演化现象[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2020, 29(5): 458-463.

[2] 周会娟, 任辉启, 余尚江, 等. 空气冲击波动压测试技术研究综述[J]. 防护工程, 2019, 41(3): 61-69.

[3] WHITHAM G B. The flow pattern of a supersonic

projectile[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1952, 5(3): 301-348.

[4] DUMOND J W M, COHEN E R, PANOFSKY W K H, et al. A determination of the wave forms and laws of propagation and dissipation of ballistic shock waves[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1946, 18(1): 97-118.

[5] GOTTLIEB J J, RITZEL D V. Analytical study of sonic boom from supersonic projectiles[J]. Progresses in Aerospace Sciences, 1988, 25(2): 131-188.

[6] STOUGHTON R. Measurements of small-caliber ballistic shock waves in air[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1997, 102(2): 781-787.

[7] SADLER B M, PHAM T, SADLER L C. Optimal and wavelet-based shock wave detection and estimation[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1998, 104(2): 955-963.

[8] WHITHAM G B. Linear and nonlinear waves [M]. New York: John Wiley and Sons, 1974: 312-338.

[9] 杨晓霖, 王乐, 张玉荣, 等. 某型导弹气动仿真中湍流模型的选择[J]. 价值工程, 2013(19): 324-326.

[10] TAYLOR A D. The TRAPS sonic boom program: NOAA TM ERL ARL-87[R]. Silver Spring, Maryland: National Oceanic and Atmospheric Administration, 1980.

[11] VARNIER J, LE PAPE M, SOURGEN F. Ballistic wave from projectiles and vehicles of simple geometry[J]. AIAA Journal, 2018, 56(7): 2725-2742.